

压缩感知在轴流压气机周向模态识别中的应用

肖志成¹, 田 杰^{1,2}, 姚 丹¹, 吴亚东^{1,2}, 欧阳华^{1,2}

(1. 上海交通大学 机械与动力工程学院, 上海 200240;

2. 先进航空发动机协同创新中心, 北京 100191)

摘 要: 研究了将压缩感知应用于轴流压气机管道周向模态识别的方法。采用数值实验的方法对稀疏模态信号进行压缩感知分析。对确定性信号, 讨论了信号欠采样因子和感知常数对不同稀疏比信号重构成功率的影响, 当感知常数大于 3.5 时, 感知成功率超过 90%; 对未知信号, 随机选取测量矩阵在感知失败时信号的模态分布没有规律。在此基础上, 将 Nyquist-Shannon 采样定理和压缩感知方法结合, 提出了轴流压气机管道周向模态传感器双均布测点布置方式, 发现了其感知的成功与否与信号模态数的差值和测点数相关, 选择合适的测点数, 可用于基于动静干涉的压气机周向模态的可靠重构。讨论了双均布测点分布的鲁棒性, 发现任意减少 3 个测点时仍可保证研究对象中至少 5 个叠加模态的成功感知。最后, 将压缩感知方法应用于轴流压气机管道周向模态识别, 成功感知到了基于 Tyler-Sofrin 的轴流压气机高阶动静干涉模态。该研究为轴流压气机管道模态分析和测量提供了新的实验数据处理方法。

关 键 词: 轴流压气机; 周向模态; 压缩感知; 双均布测点; 鲁棒性

中图分类号: V231.3

文献标志码: A

Application of compressed sensing in circumferential modal identification of axial compressor

XIAO Zhicheng¹, TIAN Jie^{1,2}, YAO Dan¹,

WU Yadong^{1,2}, OUYANG Hua^{1,2}

(1. School of Mechanical Engineering,

Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;

2. Collaborative Innovation Center for Advanced Aero-Engine, Beijing 100191, China)

Abstract: Application of compressed sensing in the recognition of azimuthal modes in axial compressor ducts was studied. Compressed sensing of sparse mode signals with various sampling numbers and distributions was performed by means of numerical experiments. For determined signals with different sparsities, effects of the undersampling factor and the sensing constant on the probability of successful reconstruction were discussed. The probability of success was more than 90% when the sensing constant was larger than 3.5. For blind signals, no specific pattern of signal reconstruction was observed. On this basis, a dual-uniform distribution of sampling points was proposed, by combining the advantages of Nyquist-Shannon sampling theorem and compressed sensing. It indicates that the feasibility of sensing de-

收稿日期: 2018-06-12

基金项目: 上海市自然科学基金(18ZR1418600)

作者简介: 肖志成(1996—), 男, 博士生, 主要从事叶轮机械内部非定常流动研究。

引用格式: 肖志成, 田杰, 姚丹, 等. 压缩感知在轴流压气机周向模态识别中的应用[J]. 航空动力学报, 2019, 34(1): 156-167. XIAO Zhicheng, TIAN Jie, YAO Dan, et al. Application of compressed sensing in circumferential modal identification of axial compressor[J]. Journal of Aerospace Power, 2019, 34(1): 156-167.

depends on the wave number differences and the number of measurement points. When appropriate number of sampling points was selected, the reconstruction of azimuthal modes was reliable. The robustness of this dual-uniform distribution was also investigated. It was verified that a signal composed of 5 modes can still be reconstructed with 3 of the sensors break down. Eventually, compressed sensing was successfully applied in the recognition of azimuthal modes arising from rotor-stator interference based on the Tyler-Sofrin theory. An innovative technique discussed gives a good option in measuring and analyzing azimuthal duct modes of axial compressors.

Key words: axial compressor; circumferential modes; compressed sensing; dual-uniform distribution; robustness

轴流压气机管道压力模态是指机匣内侧附近整周的压力模态波的波瓣分布。因压气机内部转子旋转以及转子和静子干涉而产生的压力波动是这种模态波的主要组成部分。压气机在小流量工况下可能产生的旋转不稳定性(rotating instability, RI)也具有周向压力模态特征^[1-4]。常规的周向模态测量方法使用周向均布的传感器阵列采集数据后利用空间 Fourier 分解得到不同模态的幅值^[5-9]。根据 Nyquist-Shannon 采样定理,为了能够检测 K 阶模态,至少需要 $2K$ 个传感器。在航空发动机中,由于风扇和压气机的叶片数目较多,发动机管道内的噪声周向模态数一般很大^[10],因此常规的测量方法需要使用大量的传感器。然而,实际实验中所使用的传感器数量受到经费和实验装置尺寸的限制,对高阶模态往往不能满足采样定理的要求。Candes、Donoho 等在 2006 年前后提出了一种压缩感知(compressed sensing, CS)方法^[11-15],通过非均布采样和求解最小 l_1 范数问题,实现了在亚采样条件下准确捕捉稀疏信号。目前,压缩感知在图像处理^[16-17]等领域已经得到广泛的关注,但并未在压气机管道模态测量中得到大量研究或应用。黄迅、于文君等^[18-20]在管道声学旋转模态测量中尝试了压缩感知方法,讨论传感器最小间隔等对信号重构成功率的影响,文章中模态发生器产生的旋转模态是一个确定性信号且模态数较低。对于实际轴流压气机管道模态的识别,压缩感知是否可应用于未知信号的感知和测点故障的鲁棒性等问题没有得到讨论。

本文研究压缩感知方法应用于轴流压气机管道周向压力模态识别的理论。采用数值实验的方法,分析了测点数和测点分布对稀疏信号的压缩感知重构的结果。对确定性信号,讨论信号欠采样因子和感知常数对不同稀疏比信号重构成功率影响;对未知信号,讨论了在高感知常数下,测点

分布应用于模态分布未知的信号的感知成功和失败规律。在此基础上,将 Nyquist-Shannon 采样定理与压缩感知方法结合,提出了轴流压气机管道周向模态传感器双均布测点布置方式,分析了感知成功率和失败时信号模态的分布规律,并讨论了双均布测点分布的鲁棒性。最后,将压缩感知应用于转子和进口导叶数分别为 21 和 13 的轴流压气机管道周向压力模态识别,成功感知到了基于 Tyler-Sofrin 理论^[21]的轴流压气机周向动静干涉模态。

1 压缩感知模态测量方法

1.1 压缩感知测量方法

常规的测量方法需满足 Nyquist-Shannon 采样定理,当测点数不足时产生混叠现象。如图 1 所示,对一由波数 $k = -6, 21, 32$ 组合而成的信号,当测点数 $n = 80$ 时,空间 Fourier 变换的结果可正确反应原信号;当测点数 $n = 38$ 时,因混叠而产生了两高阶分量的伪峰,并与 $k = -6$ 的分量叠加,导致完全错误的信号采集结果。

压缩感知测量方法是最近十多年兴起的欠采样信号采集及重构方法。在信号具有稀疏性的前

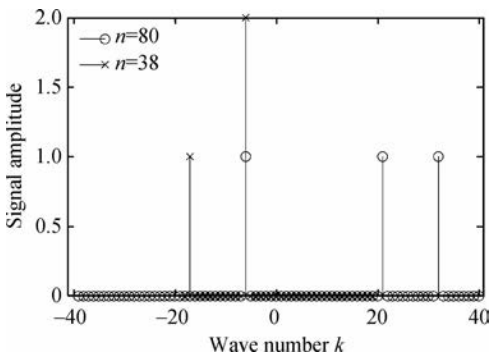


图 1 采样不足时发生混叠

Fig. 1 Aliasing occurs when undersampling

提下,通过随机分布的传感器进行采样,并求解最小 l_1 范数问题,可以在不满足 Nyquist-Shannon 采样定理的测点数下准确重构信号。

对信号 $x \in C^n$, 存在一组 C^n 中的正交基 Ψ , 在 Ψ 上, x 可以表示为

$$x = \Psi \theta \quad (1)$$

式中 θ 为系数向量,若其有且仅有 S 个非零分量,则 x 为基 Ψ 下的 S 稀疏信号。采用按列单位化的测量矩阵 $\Phi \in C^{m \times n} (m \leq n)$ 对 x 进行亚采样测量,得到测量值 $y \in C^m$

$$y = \Phi x = \Phi \Psi \theta = A \theta \quad (2)$$

式中 $A = \Phi \Psi \in C^{m \times n}$ 为感知矩阵。

对稀疏信号有效亚采样需要测量矩阵 Φ 与基 Ψ 尽可能地不相关^[15], 其中 Φ 与 Ψ 的相关系数 $\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{n} \max |\langle \phi_k, \psi_j \rangle|; 1 \leq k, j \leq n$ 。易知 $\mu(\Phi, \Psi) \in [1, \sqrt{n}]$ 。随机 $0 \sim 1$ 测量矩阵 Φ 与 Fourier 基 Ψ 满足 $\mu(\Phi, \Psi) = 1$, 具有最大的不相关性,因此可用较少的传感器得到最好的感知效果。

通过亚采样数据还原完整信号的过程称为信号的重构。信号的重构过程相当于解方程(2)。由于 $m < n$, 具有无穷多组解是该方程的通有性质。但考虑到已知信号稀疏的先验信息,因此可通过求解 l_0 范数最小化问题得到信号,但该问题是 NP-hard(non-deterministic polynomial, 非确定性多项式)问题,目前不能在多项式时间内求得解

$$\min_{\theta \in R^n} \|\hat{\theta}\|_0 \quad \text{subject to} \quad y = A\hat{\theta} \quad (3)$$

Candes 和 Tao^[11]证明了当感知矩阵 A 具有受限等距性质(restricted isometry property, RIP)时, l_1 范数最小化问题同样可以确保信号被重构成功

$$\min_{\theta \in R^n} \|\hat{\theta}\|_1 \quad \text{subject to} \quad y = A\hat{\theta} \quad (4)$$

由于 l_1 范数最小化问题有成熟的多项式时间复杂度算法,因此受限等距定理在理论研究中受到人们的重视^[11-15, 22-23]。然而,感知矩阵的受限等距常数(restricted isometry constant, RIC)一般难以计算,并且受限等距定理只是确保重构成功的充分非必要条件,从而无法用于判断某个给定的感知矩阵能否在实际应用中有效感知信号,尤其对于未知信号。而评估所选定的测点数量是否合理、测点分布能否有效感知实际信号,是应用压缩感知测量轴流压气机管道压力模式需要着重讨论的问题。

1.2 确定性信号的感知成功率

Candes 和 Tao^[12-13]证明了若感知矩阵 A 及

其行数 m 满足下式,则 A “大概率”满足 RIP 条件

$$m \geq \begin{cases} CS \lg(n/S) & \text{Gauss 随机矩阵} \\ CS (\lg n)^a & \text{部分 Fourier 随机矩阵,} \end{cases} \quad (5a)$$

$$a = 6^{[9]}, a = 4^{[20]} \quad (5b)$$

Huang^[18]使用部分 Fourier 随机矩阵进行了数值实验,利用式(5a)估计了所需传感器的数量,认为在确定性信号的条件下 C 取 1.5 即存在较大重构成功率。本节基于大量数值实验讨论确定性信号 C 取值对信号成功率的影响。为叙述方便,称 C 为感知常数。

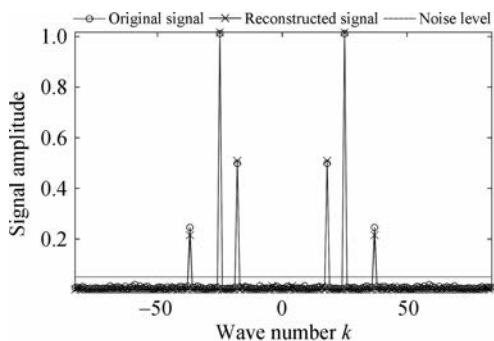
根据重构后信号与原始信号的模态特征,定义“成功”、“丢峰”和“多峰”共 3 种不同类型的重构结果,如图 2 所示。记原始信号的模态为 O ;用 P 表示重构信号的所有幅值超过 0.1 的峰所构成的集合。如果 $O = P$, 重构“成功”,此时,重构信号与原始信号的峰值完全匹配;如果 $O - P \neq \emptyset$, 重构“丢峰”;如果 $P - O \neq \emptyset$, 重构“多峰”。丢峰和多峰均会对物理现象分析产生影响,需要重点关注。

将式(5a)两边同时除以 n ,得

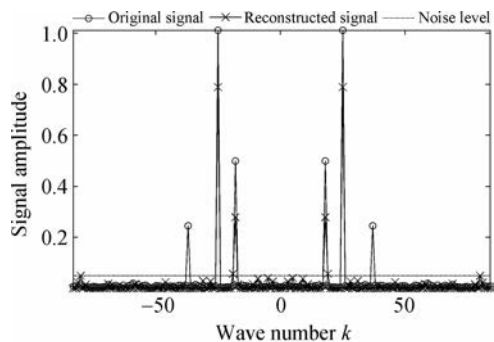
$$\gamma \geq C \sigma \lg(1/\sigma) \quad (6)$$

式中 $\sigma = S/n$ 为信号的稀疏比; $\gamma = m/n$ 为欠采样因子。

根据式(6)计算 $\inf \gamma$ 与 σ 的关系,如图 3(a)所示。信号稀疏比和 C 均显著影响欠采样因子



(a) 重构成功: 峰值完全匹配



(b) 重构失败: 重构结果丢峰

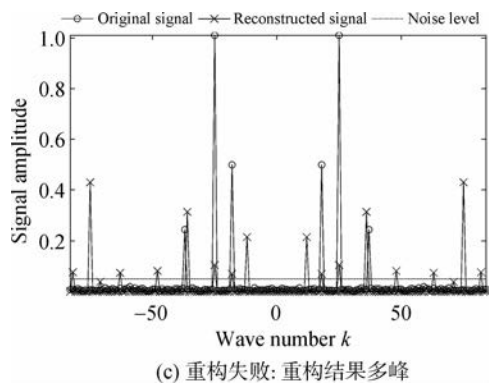


图 2 不同的信号重构结果

Fig. 2 Different types of signal reconstruction results

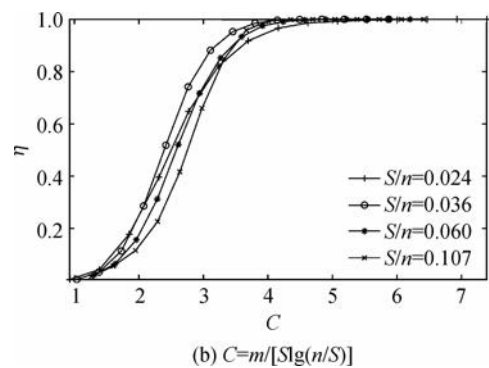


图 3 C 的估计

Fig. 3 Estimation of C

下限的取值。为在实验中选择合理的欠采样因子,基于数值实验的结果对 C 进行了估计。具体的数值实验方法如下:选取一个 S 稀疏但含有噪声的模态信号 x ,生成 10 000 个不同的随机 $0\sim 1$ 测量矩阵对该信号进行测量,对测量结果 y 使用式(4)进行重构,判断每个重构结果是否成功。定义重构成功率 η 为 10 000 次随机数值实验中重构成功次数的占比。由式(5a),感知常数满足 $C\leq m/[S\lg(n/S)]$ 。采用数值实验得到不同稀疏度信号的重构结果,如图 3(b)所示。在信号稀疏比在 0.107 或以下的条件下,当 $C>3.5$ 时,重构成功率 $\eta>90\%$ 。不同稀疏比重构成功率具有相同的变化趋势和接近的取值。考虑到在实验中信号的稀疏度是难以准确预知的,因此一个与稀疏度近似无关的 C 值具备普适性。若依据式(5b)进行计算,结果如图 4 所示,由于同一重构成功率下 C 的取值与稀疏度相关,对于非确定性信号,稀疏度不能精确确定,则在实际应用中存在困难。所以,此处仍沿用高斯分布的公式来进行测点数量的估计。

式(5a)中的 n 取决于所关心的最大模态数。由采样定理,若所关心的最大模态数为 $k_{\max}$,则 $n\geq 2k_{\max}$ 。对于确定性信号,通常 n 取值等于或

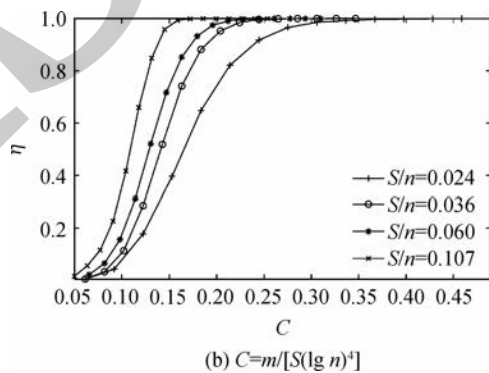
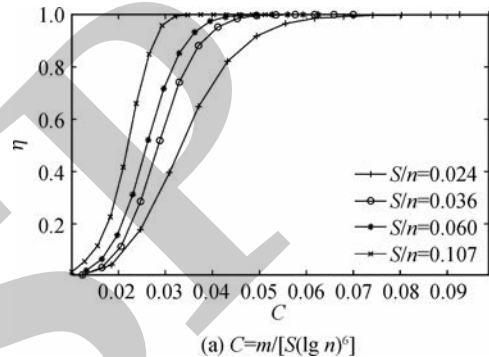


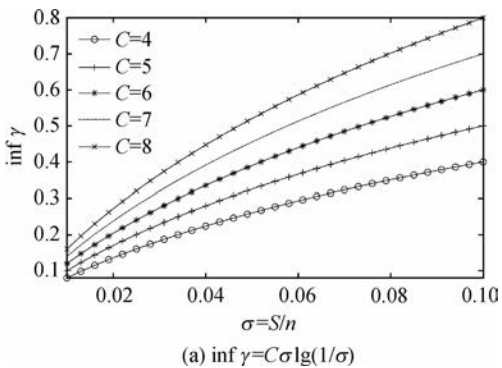
图 4 以不同定义的感知常数为横坐标的重构成功率
Fig. 4 Probability of successful reconstruction with respect to variously defined sensing constant

略大于 $2k_{\max}$ 即可,此时压缩感知观测矩阵所需要测点数目 m 较少。而对于非确定性信号,为了排除信号混叠效应,实际应用中根据所观测的物理现象, n 取值通常会大于确定性信号的数目。

综上,在管道模态测量中,对确定的信号,若使用部分 Fourier 感知矩阵并保证感知常数 $C>3.5$,有超过 90% 概率可以正确重构信号。

1.3 测点分布的评估

测点数量确定后,在实际实验中需要事先确定测点具体的布置方式。对确定性信号,可以通



过随机分布,找到合适的测点布置方式,从而精确重构信号。而对于未知稀疏信号,由于信号的稀疏分布未知,此时测点布置方式成为一个需要关注的问题。本节讨论在不同的感知常数下,使用一组固定的测点分布对不确定性信号进行感知,讨论该测点分布对不确定信号的重构成功率影响。选择的测点分布是针对某一确定信号感知成功得到的随机分布测点。选定测点后,生成信号空间 $\mathbf{X}$,使用该组测点感知信号空间中的任一信号并判断感知是否成功。其中,信号空间中的信号是几个模态波的叠加,即

$$\mathbf{X} = \left\{ \mathbf{x} \middle| \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{S_{\max}} \cos(k_i \theta), 1 \leq k_i \leq \frac{n}{2} \right\} \quad (7)$$

为研究信号的最大模态数是否影响重构效果,定义重构成功率 η_k 为所有最大模态数为 k 的信号中重构成功的个数占比。其与最大模态数的数值实验结果如图 5 所示。对于某些测点分布,重构成功率与 $k_{\max}$ 有一定关系, $k_{\max}$ 越大,重构成功率 η_k 呈现下降趋势。而欠采样因子对信号成功率有显著影响,欠采样因子越大,不同 $k_{\max}$ 下的重构成功率均得到显著提高。为研究信号的稀疏比对重构效果的影响,定义重构成功率 η_s 为所有稀疏比为 S 的信号中重构成功的个数占比。统计图 5 所示的数值实验结果,得到 η_s 与 σ 关系,如图 6 所示。可见,稀疏比对重构成功率存在显著的影响,随着 σ 增大,重构成功率迅速下降,这一点与确定性信号分析中,随机分布矩阵对不同稀疏度信号的重构成功率影响相同。此外,欠采样因子能显著提高重构成功率,在条件许可的情况下,应尽量选择较大的欠采样因子。特别需要指出的是,如图 6(b)中 $n=80, \gamma=0.287$ 的结果所示,在 $\sigma=0.050$ 时的重构成功率不足 70%,而此时其感知常数 $C=4.41>3.5$ 。这充分说明了,测点数量满足要求后,测点分布仍然是制约压缩感

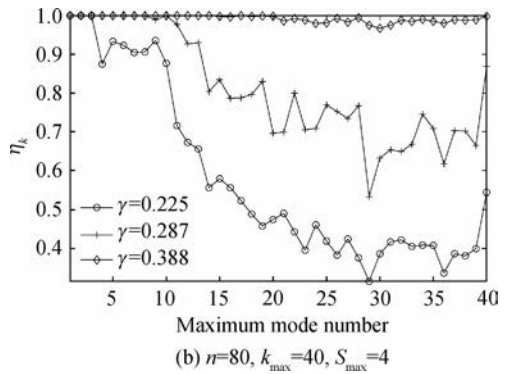
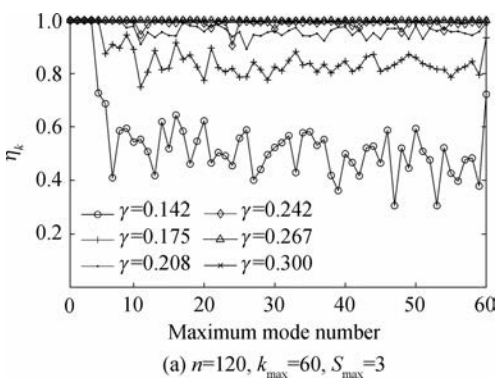


图 5 η_k 与最大模态数的关系

Fig. 5 Relationships between η_k and the maximum mode number

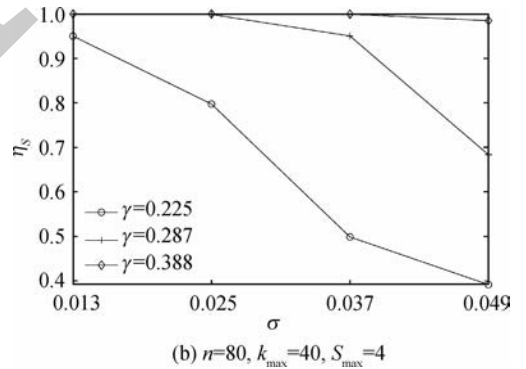
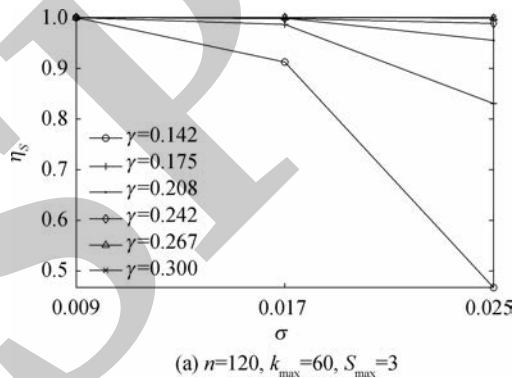


图 6 η_s 与 σ 的关系

Fig. 6 Relationships between η_s and σ

知方法在非确定性信号应用中的一个重要因素。

为进一步分析压缩感知方法对非确定性信号的适用性,分析了不同 n 和 γ 对不同信号空间的感知及重构结果,以找到信号重构成功率和感知失败的信号模态分布规律,结果如图 7 和图 8 所示。图中相邻虚线间的点对应的信号最大模态数相同。以 Pardowitz、Candes 等^[10-11]中定义的 δ 值表示感知矩阵与信号的关系。由于测点数量较少,普遍较大,这些矩阵均不满足 RIP 定理,但其中仍有重构成功率高达 98.9%的情况,如图 7(b)

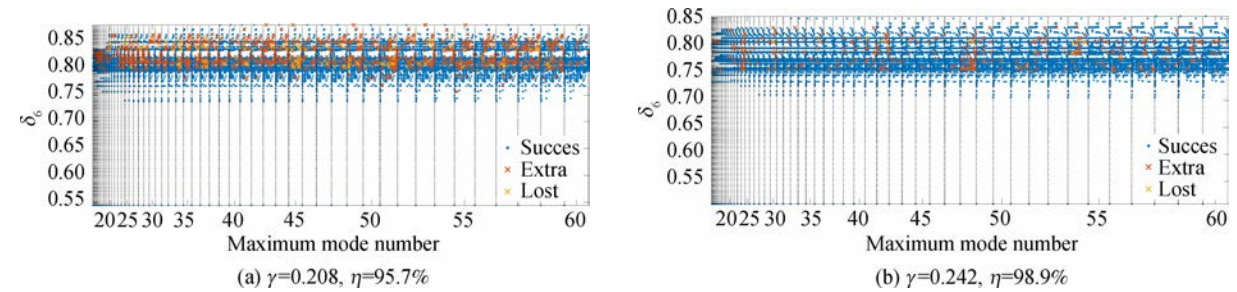


图 7 $n=120, S_{\max}=3$ 的重构结果

Fig. 7 Results of reconstruction in the case of $n=120, S_{\max}=3$

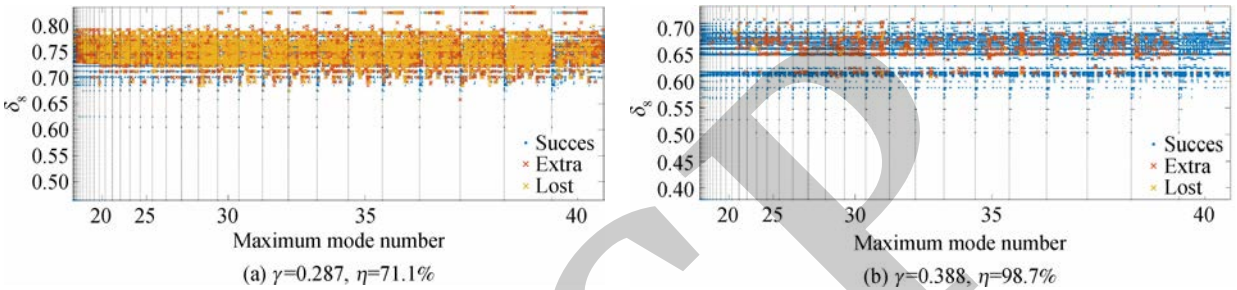


图 8 $n=80, S_{\max}=4$ 的重构结果

Fig. 8 Results of reconstruction in the case of $n=80, S_{\max}=4$

所示,这验证了 RIP 条件是充分非必要条件。同时,对感知失败的信号,其模态并未呈现出某种规律性。这点大大制约了压缩感知方法在轴流压气机管道周向模态测量中的应用,因为无法评估重构信号的正确性。

2 双均布测点及其应用

文中第 1 节讨论了对于确定性和非确定性信号,测点数量和测点分布对于采用压缩感知方法的信号重构成功率的影响。在本节中,重点讨论了压缩感知方法在轴流压气机周向模态测量中的应用,并提出了一种双均布测点的分布方式,分析重构性质,并对于该测量应用于实际实验时的结

果进行讨论。

2.1 双均布测点分布的压缩感知规律

实验研究对象为上海交通大学单级低速轴流压气机实验台,如图 9 所示。其设计流量为 4.9 kg/s,设计转速为 3 000 r/min,包含 13 片进口导叶和 21 片动叶。动叶叶尖机匣上布置测点以安装动态压力传感器。关于装置的详细描述见文献[6]。

轴流压气机管道周向模态表征旋转压力波的周向传播结构。任一时刻不同测点测得的压力 $p(\theta_s, t)$ 所构成的周向分布可分解为不同模态数的旋转压力波。每个测点的时域压力信号可表示为

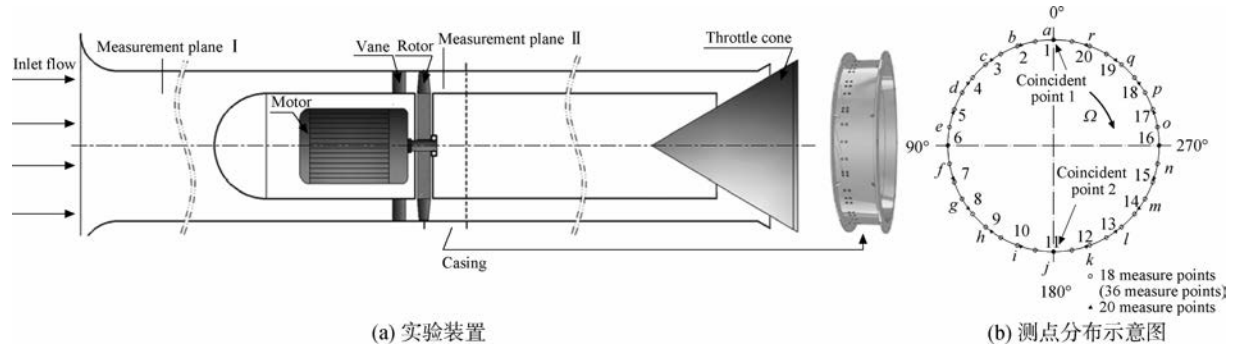


图 9 实验装置和双均布测点分布

Fig. 9 Experimental facility and the dual-uniform distribution

$$p(\theta_s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\theta_s, \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (8)$$

$$p(\theta_s, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m(\omega) e^{im\theta_s} \quad (9)$$

则

$$p(\theta_s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m(\omega) e^{im\theta_s} e^{i\omega t} d\omega = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m(t) e^{im\theta_s} \quad (10)$$

式中 $A_m(t)$ 为周向模态数为 m 的压力波幅值。压气机管道压力模态数往往较大,基于 Nyquist-Shannon 采样定理同步捕捉信号所需的传感器数量可多达数十甚至近百个。

在前期研究^[5-9]中,基于 Nyquist-Shannon 采样定理的双均布混叠方式测量得到了管道周向压力模态分布以及模态随流量的变化关系。基于采样定理的方式,其缺陷在于采样率不足导致的频谱混叠会使信息无法分离。而压缩感知方法通过选择适当的感知矩阵和重构方法可以在一定条件下准确分离频谱信息,但不排除产生多峰或者丢峰等失败情况。本节中,将两者结合,分析前期提出的双均布测点分布的压缩感知规律,一方面可以通过双均布混叠方法准确得到稀疏峰值所在位置点,解决随机分布测点感知失败的信号模态无规律可循的问题;另一方面可以通过压缩感知方法得到较准确的信号幅值,从而提高模态分解方法的分辨率。此外,对于随机干扰噪声,采用基于互相关的方式对信号进行锁相平均减弱其影响^[7]。因此,本节设置的数值信号均为不含噪声的理想信号。

双均布测点布置是指在管道整周同时布置两套均布测点,这两套测点各自的数量分别为 m_1 和 m_2 ,并满足 $m_1 \neq m_2$ 。传感器的周向位置 ϕ_i 可用下式表示:

$$\phi_i = \frac{2\pi i}{n},$$

$$i \in R =$$

$$\left\{ r \mid r = \frac{n\alpha}{m_j}; j = 1, 2; \alpha = 0, 1, \dots, m_j - 1 \right\} \quad (11)$$

式中 $n = [m_1, m_2]$, 即 m_1 和 m_2 的最小公倍数。由于两套均布测点有部分重合,实际总测点数量 $m = \text{card}R < m_1 + m_2$ 。本节的数值实验中选用的测点数量与文献[8]中实验测点分布相同,为 $m_1 = 18$ 和 $m_2 = 20$,如图 9(b)所示,18 均布测点的 1 位置、10 位置和 20 均布测点的 1 位置、11 位

置重合,因此合计 $m = 36$ 个不同测点,测点间的最小间隔 $\Delta\phi = 2\pi/180$ 。对应的测量矩阵为

$$\Phi = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,180} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{36,1} & \cdots & a_{36,180} \end{bmatrix},$$

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & j \text{ 为 } R \text{ 中第 } i \text{ 小的元素} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (12)$$

采用该双均布测点对信号空间 $\mathbf{X}$ 内的所有信号进行感知,判断感知结果并计算重构信号与原始信号 $\hat{\mathbf{x}}$ 的 l_1 误差: $\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_1$ 。

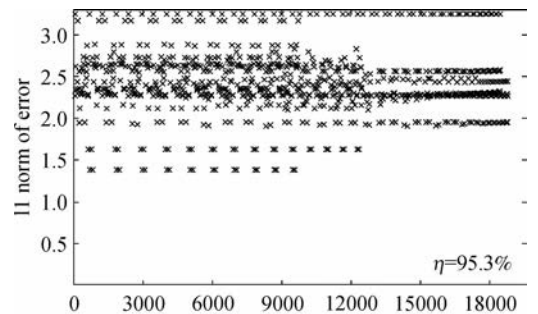
$$\mathbf{X} = \left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \sum_{j=1}^S e^{-ik_j\theta} \right\} \quad (13)$$

式中当 $S = 1, 2$ 时, $k_j \in [-89, 90]$, 共有 $C_{180}^1 = 180, C_{180}^2 = 16110$ 种模态组合方式;当 $S = 3$ 时,若仍从 $k_j \in [-89, 90]$ 范围内选取模态数组合,将有 $C_{180}^3 = 955860$ 种方式,对所有的组合方式进行验证所需的计算时长较大,因此限制 $k_i \in [1, 50]$ 。此外,对 $S = 3$ 的信号,该双均布测点的感知常数 $C = 6.7$,按文中第 1.2 节的讨论,在该感知常数下,信号重构具有较高成功率。数值实验结果表明,在稀疏度 S 分别为 1 和 2 时,该双均布测点的感知成功率为 100%;稀疏度 $S = 3$ 时,失败次数为 930,成功率为 95.3%,如图 10(a)所示。分析在双均布情况下失败信号的模态组合,发现其存在规律,并将该失败规律外推至 $k_j \in [-89, 90]$ 的范围,如图 10(b)所示。假定 3 个模态数 $k_1 < k_2 < k_3$,失败规律符合

$$\begin{cases} k_3 - k_1 \in \{am_b \mid a \in \mathbf{N}^*, b = 1, 2\} \\ k_2 - k_1 \in \{\lambda c \mid c \in \mathbf{N}^*\} \setminus \{am_b \mid a \in \mathbf{N}^*\} \end{cases} \quad (14)$$

式中 λ 为一常数,对现有测点, $\lambda = 2$ 。

考虑到稀疏度外推至 $k_j \in [-89, 90]$ 时信号地组合数较多,是否还存在不满足式(14)且失败的情况,目前还没有准确结论。本文认为此处的



(a) 重构 l_1 误差

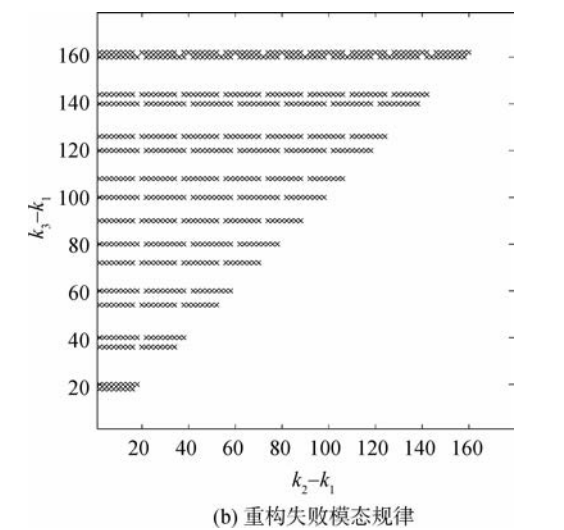


图 10 双均布测点分布感知 $S=3, k_{\max}=50$ 的信号

Fig. 10 Sensing signals of $S=3, k_{\max}=50$ using dual-uniform distribution

失败规律或许存在数学上的解释,需要进一步讨论。另外,稀疏度 4 以上的组合数更多,考虑到压气机管道周向高阶动静干涉模态幅值衰减很快,主要模态一般不超过 3 个,如文献[5,8]中提到的在叶片通过频率(blade passing frequency, BPF)下主要周向模态为 21 和-5 共 2 个,因此此处不再展开。

2.2 管道周向模态的数值实验及鲁棒性分析

将文中第 2.1 节提到的双均布测点应用于分析文献[5,8]的压气机动静干涉模态。根据 Tyler-Sofrin 动静干涉公式,在 BPF 及其谐波处的周向模态数 k 满足: $k=aB\pm bV; a, b\in \mathbf{Z}$,在动叶数 21,进口导叶数 13 下周向模态如表 1 所示,管道模态数 k 在-89~90 范围内有 14 个可能取值。数值实验选定这些模态幅值均为 1,组合成信号 $\mathbf{x}\in \mathbf{C}^n$,采用上节提到的双均布测点对其感知,并与原信号进行对比,如图 11 所示。在 BPF 及其谐波处对应的 14 个周向模态均得到了准确感知,此时对应的感知常数为 2.3。模态的间隔与静叶片数相关,本节所分析的进口导叶数为 13,其与可能产生问题的 18 和 20 增量的最小公倍数为 234 和 260,大于感知数 $n=180$,即在最大差值 180 以内的模态可以得到准确重构。考虑到压气机周向的高阶周向模态幅值通常很小,文献[8]的测量结果显示,在 BPF 处典型的模态数是与旋转相关的 $k=21$ 和与动静干涉相关的最小数 $k=-5$,因此本节 14 个模态可同时准确感知的结果表明双均布测点可有效应用在管道模态测量中。

表 1 在 BPF 及其谐波处的周向模态数

Table 1 Azimuthal modes at BPF and its harmonics

名称	f/Hz	k
BPF	1 050	-83, -70, ..., 21, ..., 86
BPF 一阶谐波	2 100	-88, -75, ..., 42, ..., 81
BPF 二阶谐波	3 150	-80, -67, ..., 63, ..., 89

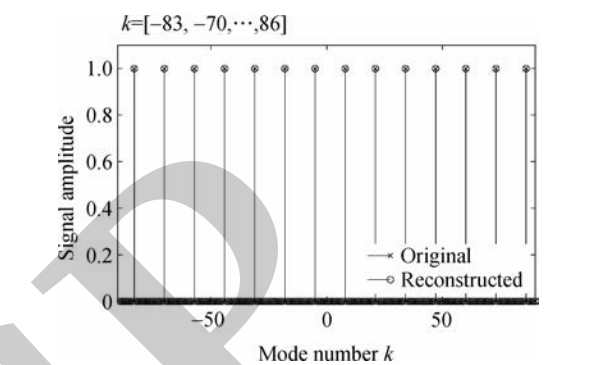


图 11 BPF 下动静干涉模态

Fig. 11 Modes arise from rotor-stator interference at BPF

通常压气机动静叶片数的设计需尽量保证最小动静干涉的模态远离 0 模态,从而利用管道的截止特性减小因动静干涉而产生的噪声。双均布测点的设计要基于具体的动静叶数,以保证动静叶数 B 和 V 和双均布测点数 m_1 或 m_2 的最小公倍数尽可能大于 n ,这样可以有较大概率使得信号得到准确重构。

航空发动机实验需要同时采用多个传感器进行现场测量时,经常出现若干传感器故障。若采用随机分布的测点进行基于压缩感知的管道模态测量时,有部分测点不能正常工作,则无法准确重构信号而导致实验失败。本文所提出以双均布测点分布和压缩感知方法,可以在有限测点失效时,仍然能够进行信号的重构。对 $m_1=18, m_2=20$ 的双均布分布,分别讨论减少其中的 1、2 或 3 个测点,对表 1 中 BPF 下的动静干涉模态组成的信号进行感知,结果如表 2 和图 12 所示。随着随机减少测点数目的增加,对于 14 阶动静干涉周向模态的感知失败率显著上升。假如仅感知包含旋转模态和最小的几个动静干涉模态而不是所有 14 个周向模态时,感知成功率显著提高,在图 12 所示的任意减少 3 个传感器,仅感知 5 个动静干涉周向模态时,信号得到准确的重构,双均布测点表现出极强的鲁棒性,显示了将 Nyquist-Shannon 采样定理与压缩感知方法结合的优越性。

表 2 双均布测点鲁棒性

Table 2 Robustness of dual-uniform distribution

故障 测点数	组合数	动静干涉模态感知失败数		
		S=14	S=8	S≤5
1	$C_{36}^1=36$	1	0	0
2	$C_{36}^2=630$	40	2	0
3	$C_{36}^3=7140$	777	69	0

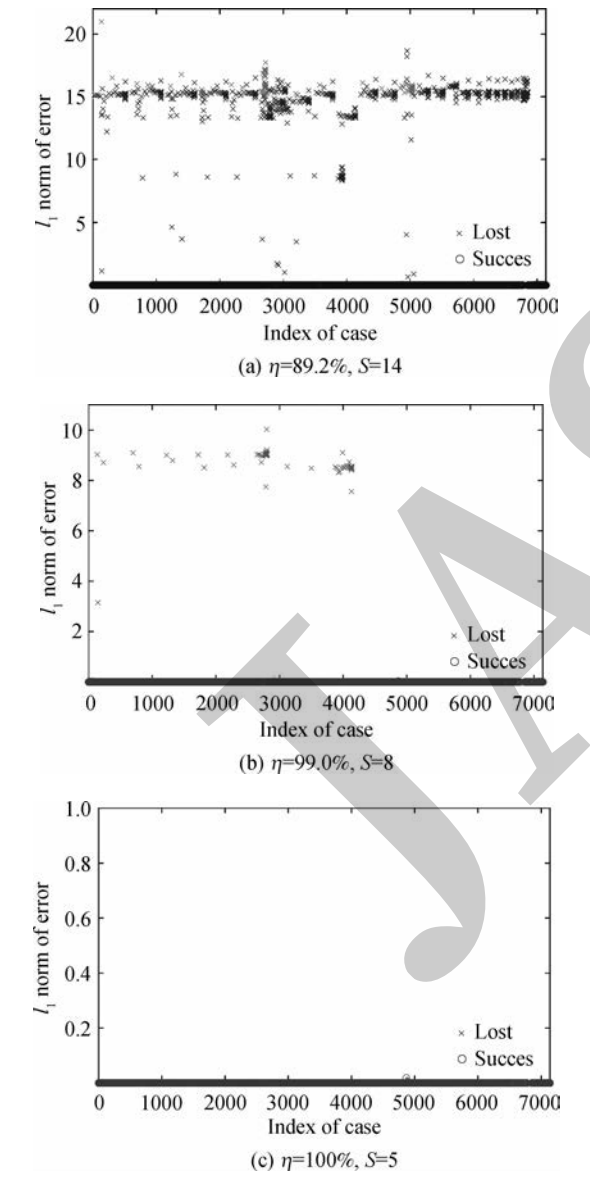


图 12 3 个传感器故障时的重构 l_1 误差

Fig. 12 l_1 error of reconstruction when 3 sensors break down

2.3 基于压缩感知的管道周向模态实验分析

对文献[8]中提到的应用双均布($m_1=18$, $m_2=20$)测点得到轴流压气机管道周向模态结果,利用压缩感知方法进行分析,分析的流量系数

$\varphi=0.172$,感知的空间点数 $n=180$ 。为了对比利用采样定理的管道周向模态识别结果,同时进行了 36 点均布传感器的测量,得到不同周向位置和时间上的压力信号,如图 13 所示,使用双均布测点进行压缩感知后的管道周向压力波动分布更加明显清晰,提升了分辨率的同时没有出现压力分布混乱无序的情况。在时空坐标轴上能观察到压力波的两个传播特征,对应叶片通过频率(BPF)处的动静干涉模态。

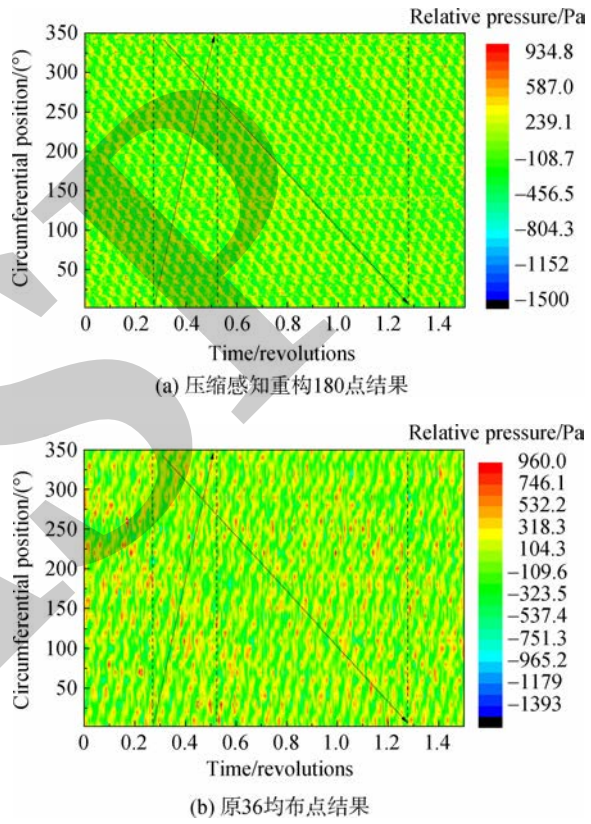


图 13 压力分布时空图($\varphi=0.172$)

Fig. 13 Pressure distribution in spatial-temporal domain ($\varphi=0.172$)

对任一测点压力结果进行功率谱分析,分解基于压缩感知理论重构得到 180 空间点数据,采用管道周向模态分解方法得到周向模态,结果如图 14 所示。图 14(a)和图 14(b)显示,压力频谱由离散峰值和宽频分量组成,其中离散峰位于各阶转子频率(rotating frequency,RF)以及 BPF 及其谐波处。图 14(c)和图 14(d)的模态分析显示,对应转子频率的模态数与其谐波阶数一一对应,转子模态谱上清晰可见线性增长模态。BPF 及其一阶谐波处的模态数与 Tyler-Sofrin 的动静干涉模态一一对应,其中在 BPF 处主要的模态数为 21 和 -5,分别对应了旋转模态和一阶动静干涉

模态。在 BPF 的一阶谐波处,主要的模态数为 42,对应了旋转模态。应用压缩感知重构后的轴流压气机管道周向模态结构在模态数上是准确的。

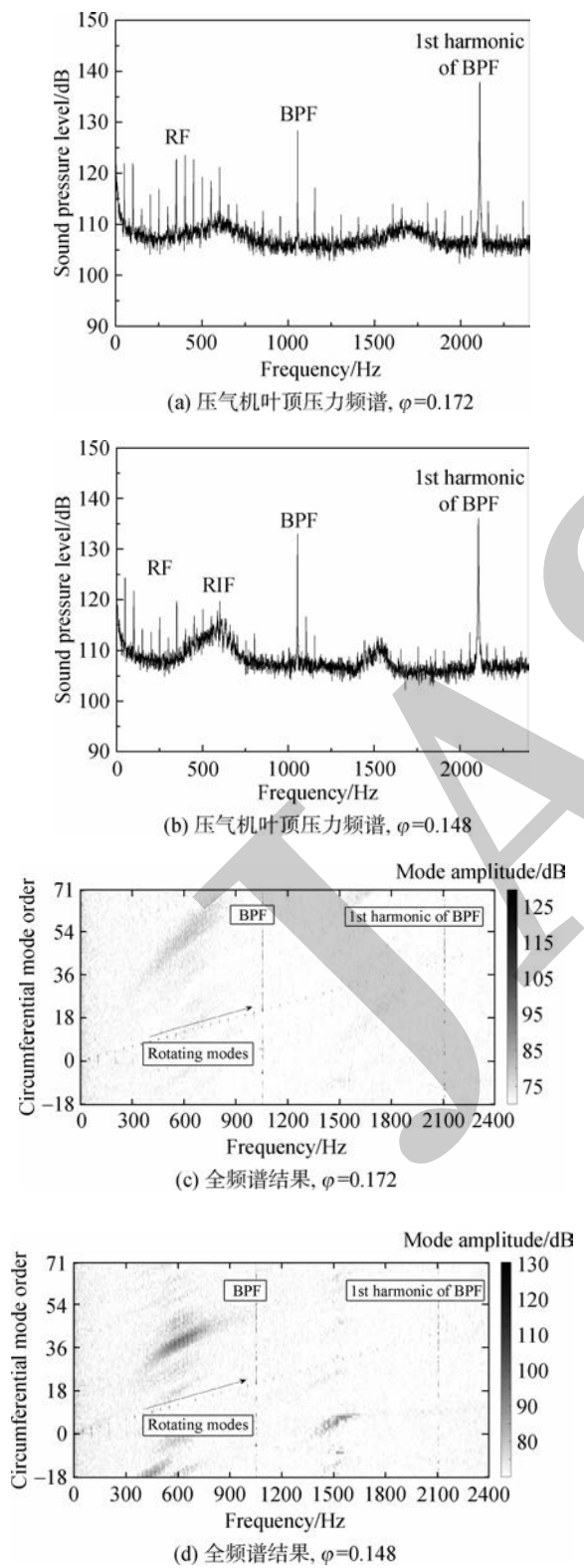


图 14 压力频谱的压缩感知模态重构

Fig. 14 Mode decomposition of the pressure spectrum

对轴流压气机在 BPF 及其一阶谐波处周向模态的幅值进行了分析,如图 15 所示。图中结果包括了双均布测点中的 20 均布空间点,均布的 36 空间点以及基于压缩感知的 180 空间点进行周向模态分解后的 BPF 及其一阶谐波处的主要模态幅值。在 BPF 处,均布测点 20 点结果显示混叠后的周向模态数为-5 和 1,且 1 幅值大于-5 幅值。均布 36 点结果周向模态由于混叠为-5 和-15,且-15 幅值大于-5 幅值。根据文献 [8] 的分析,均布测点 20 和 36 点得到实际模态为 21 和-5,且对应旋转效应大于动静干涉效应。应用压缩感知后直接得到的模态数为 21 和-5,且对应的幅值小于混叠结果,因此压缩感知后的周向较小幅值相对更加准确。同理,在 BPF 的一阶谐波处应用压缩感知得到的幅值结果也相对更准确。

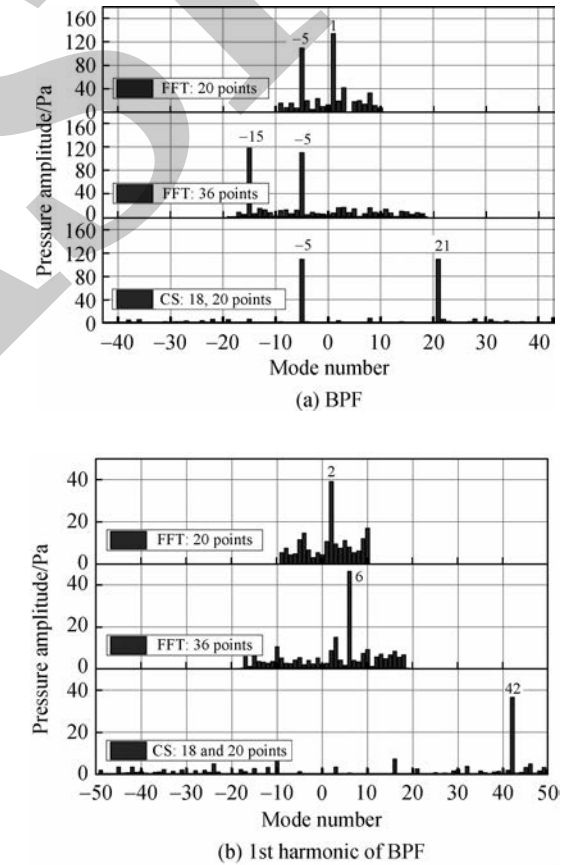


图 15 特定频率下的模态分解结果

Fig. 15 Mode decomposition at specific frequencies

压缩感知方法在压气机周向模态测量上的有效性得到了充分的验证。更多流量下轴流压气机由于动静干涉和旋转不稳定的周向模态分解结果,将在进一步的分析中详细阐述,本文中不再展

开。对于轴流压气机由于动静干涉和旋转不稳定现象引致的管道周向模态分布,双均布压缩感知方法可以大大减少传感器消耗且具有较好的鲁棒性,该方法在航空发动机压气机管道周向模态测量中具有较大应用前景。最少传感器的布置要根据分析的信号特点来决定,具体如本文实验中主要关注的是对应 BPF 及其谐波处的周向模态,其模态数根据 Tyler-Sofrin 公式,由具体的动静叶片数得到其模态分布,再选择合适的双均布 n_1 和 n_2 的数值,使其最小公倍数能够涵盖主要的模态范围,且小于 n_1 和 n_2 分别与静叶片数得到的最小公倍数。当然,由于通常航空发动机测试台架的运行成本较高,且运行时尤其是现场测量常发生传感器实效,在条件许可的情况下尽可能多的布置传感器,保证感知的准确性。

3 结 论

本文研究了压缩感知方法用于轴流压气机管道周向压力模态识别的理论。通过数值实验分析了压缩感知方法的特点,提出了一套双均布测点布置方式,探讨了其在管道压力模态测量中的应用,并对轴流压气机管道周向模态实验测量结果进行了分析。主要结论包括:

1) 对确定性信号,根据式 $m \geq C \text{S} \lg(n/S)$ 选取测点数量,当 $C > 3.5$ 时,采用随机测点分布矩阵有超过 90% 概率成功感知信号。对未知的信号,采用不同测点分布分析不同稀疏比的未知信号空间时,即使满足感知常数 $C > 3.5$ 的要求,某些测点分布下也存在低感知成功率的可能,感知失败时的信号的模态分布没有规律。

2) 结合 Nyquist-Shannon 采样定理和压缩感知,提出了一种双均布测点布置方式。感知失败信号具有明确的模态分布规律。构造的 18 和 20 点的双均布测点分布,对转子叶片数 21,进口导叶数 13 的轴流压气机成功感知到基于 Tyler-Sofrin 动静干涉理论的管道周向模态分布。

3) 对轴流压气机现场测量时存在的测点故障问题,讨论了双均布测点的鲁棒性。在任意 1~3 测点故障时,仍可准确重构至少 5 个主要模态,表明该测点分布在轴流压气机现场实验测量时的高可靠性。

本文研究结果为轴流压气机管道模态分析和测量提供新的实验手段和理论基础。此外,随着流量减小,轴流压气机由于旋转不稳定性在 BPF 下出现连续间隔的频率凸起,其周向模态随流量

变化,是典型未知信号,应用双均布测点分布的压缩感知方法对其分析的结果将在后续阐述。

参考文献:

- [1] LIU J, HOLSTE F, NEISE W. On the azimuthal mode structure of rotating blade flow instabilities in axial turbomachines[R]. AIAA 96-1741, 1996.
- [2] KAMEIER F, NEISE W. Rotating blade flow instability as a source of noise in axial turbomachines[J]. Journal of Sound and Vibration, 1997, 203(5): 833-853.
- [3] MAILACH R, LEHMANN I, VOGELER K. Rotating instabilities in an axial compressor originating from the fluctuating blade tip vortex[J]. Journal of Turbomachinery, 2001, 123(3): 453-460.
- [4] MARZ J, HAH C, NEISE W. An experimental and numerical investigation into the mechanisms of rotating instability[J]. Journal of Turbomachinery, 2002, 124(3): 367-374.
- [5] 姚丹, 田杰, 欧阳华, 等. 压气机旋转不稳定性的周向模态特性及其分解方法[J]. 航空动力学报, 2018, 33(2): 431-439.
YAO Dan, TIAN Jie, OUYANG Hua, et al. Circumferential mode characteristic of rotating instability and its decomposition method of compressor[J]. Journal of Aerospace Power, 2018, 33(2): 431-439. (in Chinese)
- [6] 王昊, 吴亚东, 欧阳华. 压气机叶顶泄漏流振荡周向传播特性的数值模拟[J]. 航空动力学报, 2017, 32(3): 538-548.
WANG HAO, WU Yadong, OUYANG Hua, et al. Numerical simulations on circumferential propagating characteristics of tip leakage flow oscillation in compressor[J]. Journal of Aerospace Power, 2017, 32(3): 538-548. (in Chinese)
- [7] 王昊, 吴亚东, 欧阳华. 低速轴流压气机中气动旋转不稳定性和叶顶泄漏流脉动特性[J]. 航空动力学报, 2016, 31(9): 2239-2250.
WANG HAO, WU Yadong, OUYANG Hua, et al. Aerodynamic rotating instability and fluctuated characteristics of tip clearance flow in low speed axial flow compressor[J]. Journal of Aerospace Power, 2016, 31(9): 2239-2250. (in Chinese)
- [8] TIAN Jie, YAO Dan, WU Yadong, et al. Experimental study on rotating instability mode characteristics of axial compressor tip flow[J]. Experiments in Fluids, 2018, 59(4): 63-75.
- [9] 姚丹, 田杰, 吴亚东, 等. 压气机叶顶区域周向模态特性的实验[J]. 航空动力学报, 2018, 33(10): 2534-2542.
YAO Dan, TIAN Jie, WU Yadong, et al. Experiment on circumferential mode characteristics of axial compressor tip flow[J]. Journal of Aerospace Power, 2018, 33(10): 2534-2542. (in Chinese)
- [10] PARDOWITZ B, TAPKEN U, SORGE R, et al. Rotating instability in an annular cascade: detailed analysis of the stationary flow phenomena[J]. Journal of Turbomachinery, 2014, 136(6): 061017. 1-061017. 10.

[11] CANDES E,TAO T. Decoding by linear programming[J]. IEEE Transactions on Information Theory,2005,51(12): 4203-4215.

[12] CANDES E,ROMBERG J,TAO T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51(8): 1207-1223.

[13] CANDES E, TAO T. Near optimal signal recovery from random projections: universal encoding strategies? [J]. IEEE Transactions on Information Theory,2006,52(12): 5406-5425.

[14] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory,2006,52(4):1289-1306.

[15] CANDES E J,WAKIN M B. An introduction to compressive sampling[J]. IEEE Signal Processing Magazine,2008, 25(2):21-30.

[16] DUARTE M F,DAVENPORT M A,TAKHAR D,et al. Single-pixel imaging via compressive sampling[J]. IEEE Signal Processing Magazine,2008,25(2):83-91.

[17] LUSTIG M,DONOHO D,PAULY J M. Sparse MRI:the application of compressed sensing for rapid MR imaging [J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2007, 58(6): 1182-1195.

[18] HUANG Xun. Compressive sensing and reconstruction in measurements with an aerospace application[J]. AIAA Journal,2013,51(4):1011-1016.

[19] YU Wenjun, HUANG Xun. Compressive sensing based spinning mode detections by in-duct microphone arrays [J]. Measurement Science and Technology,2016, 27(5): 055901.1-055901.11.

[20] YU W,MA Z,LAU A S H,et al. Analysis and experiment of the compressive sensing approach for duct mode detection[J]. AIAA Journal,2018,56(2):648-657.

[21] TYLER J M,SOFRIN T G. Axial flow compressor noise studies[J]. SAE Transactions,1962,70(1):309-322.

[22] 章瑞. 压缩感知中最优限制等距常数界[D]. 杭州:浙江大学,2017.

ZHANG Rui. Optimal RIP constants in compressed sensing[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2017. (in Chinese)

[23] RUDELSON M,VERSHYNIN R. On sparse reconstruction from Fourier and Gaussian measurements[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2008, 61(8):1025-1045.

(编辑:叶 青)